数理解析研究所講究録
第 1871 巻 2013 年 214-225

STRUCTURES AND DIMENSIONS OF VECTOR VALUED JACOBI FORMS, AND CONJECTURES OF SHIMURA TYPE AND HARDER TYPE

TOMOYOSHI IBUKIYAMA
(OSAKA UNIVERSITY)

1. 序

詳しい内容はいくつかに分けて論文に書く予定なので、ここでは次のような結果についての概要を、その背景も込めて解説することにする。

- 2次ベクトル値ジーゲル保型形式でウェイトが整数のものと半整数のものの間の志村型の対応について、筆者は以前にある予想を発表していたが、これとは異なる新しい予想の提示をする。
- この新予想が、整数ウェイトの2次ジーゲル保型形式と1変数の保型形式の間の合同を巡る Harder 予想を、半整数ウェイトにおけるある有利さを通じて証明する明確な戦略を与える。
- 以上の実例を作ることを一つの動機として、半整数ウェイトと同値な、指数1の2次ベクトル値ヤコービ形式の構造定理を次元公式を（重さが8以上で）与える。
- これにより、半整数ウェイトのジーゲル保型形式と1変数保型形式の間のすべての素数での固有値の合同が証明できる実例を与える。(これは「すべての素数」というところがキーポイントで、筆者の知る限り、有限個の素数で数値実験した結果以上の例は存在しなかったと思う。)

以上で、ヤコービ形式に関する結果はそれ自身全く独立した結果であり、そこから出発する述べ方もあるが、ここでは Harder 予想からの観点のみから説明したい。

2. 記号の復習

ジーゲル保型形式に関する定義と記号を簡単に復習する。H_n をジーゲル上半空間とし、$Sp(n,\mathbb{R})$ を階数 n (サイズ $2n$) のシンプレクティック群とする。$GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現 (ρ, V) と H_n 上の V-値正則関数 $F(Z)$ および $g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$ に対して、

$$(F|_\rho[g])(Z) = \rho(CZ+D)^{-1}F(Z)$$

と定義するとこれは群作用になる。$\Gamma_n = M_{2n}(\mathbb{Z}) \cap Sp(n,\mathbb{R})$ とおき、任意の $\gamma \in \Gamma_n$ に対して $F|_\rho[\gamma] = F$ となるとき F をウェイト ρ のジーゲル保型形式と呼ぶ。ただし、$n=1$ の場合は以上に $i\infty$ で有限という条件をつける。このうち佐武コンパクト化の境界で消えるものをカ

スプ形式という。たとえば $n=2$ ならば $\rho_{k,j}(A)=\det(A)^k Sym_j(A)$ (Sym_j は j 次の対称テンソル表現）のみがウェイトである。この場合、ジーゲル保型形式の空間ないしはジーゲルカスプ形式の空間をそれぞれ $A_{k,j}(\Gamma_2)$, $S_{k,j}(\Gamma_2)$ と書き、特に $j=0$ のときは $A_k(\Gamma_2)=A_{k,0}(\Gamma_2)$, $S_{k,0}(\Gamma_2)$ と書く。もし j が奇数ならば $-1_4\in\Gamma_2$ より $A_{k,j}(\Gamma_2)=0$ であるのは容易にわかる。ジーゲルモジュラー群 Γ_n のヘッケ作用素の理論はよく知られている。たとえば$n=2$ ならば、これは $T(1,1,p,p)$, $T(1,p,p^2,p)$, $T(p,p,p,p)$ で生成される。$T(p)=T(1,1,p,p)$、$T(p^2)=T(1,p,p^2,p)+T(1,1,p^2,p^2)+T(p,p,p,p)$ とおき、F がこれらの固有関数の時、F のそれぞれの固有値を $\lambda(p)$, $\lambda(p^2)$ と書くと、F の Spior L 函数は

$$L(s,F,Sp)=$$
$$\prod_p(1-\lambda(p)p^{-s}+(\lambda(p)^2-\lambda(p^2)-p^{2k+j-4})p^{-2s}-\lambda(p)p^{2k+j-3-3s}+p^{4k+2j-6-4s})^{-1}$$

で定義される。

3. Harder 予想とは何か

もし k が偶数ならば、任意のヘッケ固有関数 $f\in S_{2k-2}(\Gamma_1)$ について、あるゼロでない $F_f\in S_k(\Gamma_2)$ があって

$$L(s,F_f,Sp)=\zeta(s-k+1)\zeta(s-k+2)L(s,f)$$

となることは Saito-Kurokawa lift としてよく知られている。もしベクトル値のときも同様のリフトがあると想像すると、ベクトル値のジーゲル保型形式の Spinor L 函数の関数等式は $s\to 2k+j-2-s$ に対して満たされるから、$f\in S_{2k+j-2}(\Gamma_1)$ に対して、$\zeta(s-k+2)\zeta(s-k-j+1)L(s,f)$ の形のリフトが想定される。しかし、実際には $j>0$ ならば $S_{k,j}(\Gamma_2)$ へのリフトは存在しないと思われる。(実際、そのような実例は全く存在しないし、リフトは正則でない離散系列表現の方に現れると考えられている。）しかし、リフトはないけれど、合同はあるというのが Harder 氏の考えである ([1] 参照)。具体的には、ヘッケ固有関数 $f=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^n\in S_{2k+j-2}(\Gamma_1)$, $a(1)=1$, があれば、これに対応してある $F\in S_{k,j}(\Gamma_2)$ が存在して、f の固有値の生成する体のある素イデアル数 $\mathfrak{l}$ に対して

$$\lambda(p)\equiv p^{k-2}+p^{k+j-1}+a(p) \bmod \mathfrak{l}$$

がすべての素数 p について成立するというものである。(ちなみに、Euler 因子全体での合同を主張する方が自然であるから、$\lambda(p^2)$ についても自然な合同が期待できるが、ここでは省略しておく。）注意として、f からジーゲル保型形式へのリフトがあるわけではないから、これはジーゲル保型形式同志の合同を主張しているわけではない。同じ群の保型形式間の合同は、証明が知られている場合がいろいろあり、ある程度証明方法もあるが、今は違う群なので、単一の実例に対してさえ合同式を証明する標準的な方法というものは知られていない。

以上で、素イデアル $\mathfrak{l}$ は実際には何であるべきなのかについては、Harder [1] では非常に明確には述べられているわけではないが、概ね

実験的には $L(k+j,f)/\Omega_{\pm}$ を割る「大きな」素イデアルと主張されている。

念のため、少し特殊値について復習する。楕円保型形式 f の L 函数の値 $L(m,f)$ を $1 \leq m \leq k-1$ で考えると、$L(m_1,f)/l(m_2,f)$ は m_1, m_2 の偶奇が一致するとき、代数的数であることが証明されている。(Shimura etc.) これは次のように言い換えてもよい。f の周期と呼ばれる2種類の量 $\Omega_{\pm}$ があって、m の偶奇に応じて $L(m,f)/\Omega_{+}$ または $L(m,f)/\Omega_{-}$ が代数的な数になる。これらを $L_{alg}(m,f)$ と書いて、特殊値の代数的部分と呼ぶことがある。もちろんこれだけでは $\Omega_{\pm}$ の値は代数的数の倍数を除いてしか決まらないから、この意味では $L_{alg}(m,f)$ は well-defined ではない。実際には local にはきちんとした定義があるが、それを具体的な数値の計算と結びつける方法は知られていない。(Harder が正確な描写を少し試みているが、それでもまだ予想の部分を含んでいる。) そのほかにも事情がある可能性があって、「大きな素イデアル」というあいまいな表現になっている。この部分を明確に述べるのは現在の段階では難しそうであるが、私は、「なんとなく特徴的に見える大きそうな素数」という程度の意味だと解釈している。

さて、この Harder 予想の証明は、現在のところ知られていない。現状は、個々の f や F に対して、有限個の p で合同を実験的に調べて、予想が正しいらしいという状況証拠を求めている段階であった。この状況証拠は Harder や van der Geer などがいろいろと調べている。

今回の私の話は、こういう実験を超えて、これをどうやって証明するかという一つの戦略を、かなり確かな証拠とともに示すことにある。

4. SHIMURA 型対応予想

さて、Harder 予想とは無関係に、私は2次ジーゲル保型形式に対して整数ウェイトと半整数ウェイト (正確に言えばウェイトが $\det^l Sym(j)$ で l が整数のものと半整数のもの) の間の L 函数を保つような志村型の同型対応に興味があって、 前からいろいろ実験してきた。以前に予想を一つ提示したが、今回思いがけず、新しい予想の定式化ができた。この予想自身、非常に面白いのだが、それとは別に、この予想に従って Harder 予想を書き換えるとどうなるかというのが今回の興味である。まずは志村型対応予想から述べる。その前に、半整数ウェイトのジーゲル保型形式について述べる必要がある。離散群として

$$\Gamma_0(4) = \{\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2; C \equiv 0 \bmod 4\} \subset Sp(2,\mathbb{R})$$

をとる。4を法とする原始 Dirichlet 指標 $\psi(a) = \left(\frac{-4}{a}\right)$ に対して、$\Gamma_0(4)$ の指標を $\psi(\gamma) = \psi(\det(D))$ で定義し、これを同じ ψ であらわす。また半整数ウェイトの保型因子を定義するために、志村にならって、

$$\theta(\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} exp(2\pi i\, p\tau^t p), \qquad \tau \in H_2$$

とおく。$\gamma \in \Gamma_0(4)$ のとき $(\theta(\gamma\tau)/\theta(\tau))^2 = \psi(\gamma)\det(CZ+D)$ が知られているので $\theta(\gamma\tau)/\theta(\tau)$ を $\Gamma_0(4)$ のウェイト 1/2 の保型因子と思って

よい。ウェイトが $\det^{k-1/2} Sym_j$ にあたる保型因子は、

$$(\theta(\gamma\tau)/\theta(\tau))^{2k-1} Sym_j(CZ+D)$$

で定義すればよい。しかし、ここでは指標も考えに入れたいので、$\Gamma_0(4)$ の群指標を χ として、Sym_j の表現空間を V_j と書くとき、H_2 上の V_j 値正則関数 F が任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$F(\gamma\tau) = \chi(\gamma)(\theta(\gamma\tau)/\theta(\tau))^{2k-1} Sym_j(CZ+D)F(\tau)$$

を満たす時、F をウェイト $\det^{k-1/2} Sym_j$ の指標 χ 付のジーゲル保型形式と言うことにする。このような関数の空間を $A_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\chi)$ と書く。また各カスプでゼロになるものをカスプ形式といい、その空間を $S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\chi)$ と書く。χ が自明なときは χ を省略する。Hecke にならって、χ が自明な指標の時を Haupt type, $\chi = \psi$ の時を、Neben type ということにする。ちなみに、1次の半整数ウェイトでは Neben type の保型形式は零しかないので、Haupt と Neben の両方が出てくるのは、1変数の時にはなかった新しい現象である。なお、上の保型因子の2乗には $\psi(\gamma)$ が出てくるので、何をもって Haupt とか Neben とか言うのは少々微妙な点もあるが（たとえば上の定義だと、Neben に整数ウェイトを書けたとき、これが Neben になるかどうかはウェイトのパリティーによって変わる）、とりあえず上の定義を採用しておく。

さて、保型因子を定義する関係でレベルのついた群 $\Gamma_0(4)$ を用いたが、これからレベル 1 の部分を切り出したい。これは1変数の時は、Kohnen が定義しており、Kohnen's plus space との名称で知られている。一般次元の場合にもこの定義を、(正則または歪正則な）指数1のヤコービ形式の空間との同型対応が付くように拡張することができる。(See [5], [2]). 具体的には、$F \in S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi^l)$ のフーリエ展開を

$$F(\tau) = \sum_{T \in L_2^*} a(T) exp(2\pi i Tr(T\tau)), \qquad (a(T) \in V_j),$$

と書くとき、この F が plus subspace $S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi^l)$ の元であるというのは、ある μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{Z}$ に対して

$$T \equiv (-1)^{k+l+1} \begin{pmatrix} \mu_1^2 & \mu_1\mu_2 \\ \mu_1\mu_2 & \mu_2^2 \end{pmatrix} \bmod 4L_2^*$$

となるようなすべての T に対して、フーリエ係数が $a(T)=0$ となることとする。ここで L_2^* は 2×2 の半整数対称行列全体の集合であり、合同は右辺と左辺の差が $4L_2^*$ に属することを意味する。

4.1. **Old Conjecture.**

Conjecture 4.1 (Old Version [9]). 非負なる偶数 j を $k \geq 3$ となる整数 k について、$\mathbb{C}$ 上の線形同型写像

$$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4)) \cong S_{j+3,2k-6}(\Gamma_2,\psi)$$

で、像と原像の L 関数が一致するようなものが存在する。

ここで L 函数は右辺（整数ウェイト）については Spinor L 関数を取り、左辺（半整数ウェイト）については、Zhuravlev の定義した L 関数をとる。この L 函数の定義や、この予想の根拠などについては、[9] に詳しく書いてあるので、ここでは繰り返さない。

4.2. **Lifting conjectures.** ２０１２年の３月末に私は N. Dummigan から一通のメールを受け取った。そこでは、結局のところ Haupt type と Neben type はあまり違わないのではないかという問題が提起してあった。私はこの意見にいささか興奮して、まず最初に次元の比較の計算にとりかかった。実は plus space の次元公式は、$j>0$ の時はわかっていないのだが（今回新しく証明された次元公式については後述するが)、対馬による予想がある。これを用いるのである。

Theorem 4.2. 対馬の次元公式予想を信じることにする。すると $j \geq 0$ が偶数の時、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned}&\dim S^{+}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))\\&= \dim S^{+}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)+\dim S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))\times\dim S_{2k+2j-2}(SL_2(\mathbb{Z})).\end{aligned}$$

ところで、以前に、筆者と林田秀一は、$S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))$ と $S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ のペアから Haupt type $S^{+}_{k-1/2,0}(\Gamma_0(4))$ への一種の Yoshida lift が存在することを予想していた ([6])。その後林田秀一は、 Ikeda lifting の Fourier-Jacobi 係数に関する Maass relation の類似物を証明し ([3])、それを使用することによって、このようなリフトの構成に成功していた ([4], 但し、リフトが単射かどうかは一般にはわかっていない)。これを今回微分作用素を用いて一般化し、$S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))\times S_{2k+2j-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ から $S^{+}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4)))$ への具体的な写像 σ をある種の積分で構成した。(σ の具体的な形は今は省略する。）これについて、次がわかる。

Theorem 4.3. 非負偶数 j と整数 $k\geq 3$ に対して、２つの保型形式 $g\in S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))$ と $f\in S_{2k+2j-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ がヘッケ固有関数ならば、上記の σ について $\sigma(g,f)$ もそうであり、もし $\sigma(g,f)\neq 0$ ならば、

$$L(s,\sigma(g,f)) = L(s-j-1,g)L(s,f)$$

となる。

次元の関係や実例から考えて、次の予想を提案するは自然であろう。

Conjecture 4.4. （１）σ は *injective* である。
（２）σ の像の $S^{+}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ の中での *Petersson* 内積に関する直交補空間を $S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ と書くと、L 関数を保存するような次の同型が存在する。

$$S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4)) \cong S^{+}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi).$$

ここで (2) の具体的な同型写像を構成することは、残念ながらできていない。フーリエ係数 $a(T)\neq 0$ となる T の形が両者で非常に違うので、あまり単純な写像ではないように思うが、よくわからない。

4.3. New conjecture of Shimura type. 昔の Neben type に対する志村型対応予想と、前節のリフトに関する予想から、Haupt type に関する予想が述べられるのは当然である。

Conjecture 4.5. 整数 $k \geq 3$ と偶数 $j \geq 0$ に対して、L 関数を保つ次の線形同型が存在する。

$$S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4)) \cong S_{j+3,2k-6}(\Gamma_2).$$

5. 半整数ウェイト版の Harder 予想

さて、整数ウェイトは半整数ウェイトに対応しているというのが予想なのだから、当然 Harder 予想の半整数ウェイト版が存在する。しかし、半整数ウェイト版には、整数ウェイト版に比較して、有利な点が一つある。それは、合同の相手となる標準的なジーゲル保型形式の存在である。今、ウェイト $S^{+}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ に属するジーゲル保型形式を考えると、合同の相手となるべき 1 変数の保型形式のウェイトは $2k+2j-2$ のはずである。しかし、1 変数の志村対応の定理により

$$S_{2k+2j-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \cong S^{+}_{k+j-1/2}(\Gamma_0^{(1)}(4))$$

(記号は普通の $\Gamma_0^{(1)}(4) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ としている) であるから、f に対応するウェイトが $k+j-1/2$ なる保型形式 h が存在する。この保型形式から Klingen 型のアイゼンシュタイン級数 $E(h)$ で $E(h) \in S^{+}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ なるものが構成できる。この $E(h)$ の Zhuravlev 式の L 函数は

$$L(s,E(h)) = \zeta(s-j-1)\zeta(s-2k-j+4)L(s,f)$$

であることが示せる。($j=0$ のときは [6], $j>0$ のときは [9], ただし [9] では下の保型形式がカスプ形式という仮定をうっかり書き落としている点、注意されたい。) 今はパラメータ k, j を半整数のときが単純に見えるようにとっているので、もともとの Harder 予想とは見かけが異なっているが、実はこの $L(s,E(h))$ の p^{-s} での係数が、Harder 予想での 1 変数からの固有値で記述される部分になっているのである。もちろん p^{-s} の係数というのは、半整数ウェイトの保型形式上の適当なヘッケ作用素の固有値である。半整数ウェイトのヘッケ作用素について、きちんと述べるのは面倒なので、詳しくは [9] などを参照してもらうことにして、ここでは $T(1,p,p^2,p)$ という形のヘッケ作用素の固有値ということだけ言っておく。

ついでながら、$E(h)$ は Haupt type である。Neben type のウェイト $\det^{k-1/2} Sym_j$ の保型形式は実は常にカスプ形式になるので、Eisenstein 級数などは存在しない。そして、この点が新しい予想の有利な点でもある。Neben type の予想を用いて、Harder 予想を記述すると、Haupt type のジーゲル保型形式 $E(h)$ と Neben type のジーゲル保型形式の合同を証明しなければならないことになる。しかし、これらは同じ群に属しているとは言い難いので、合同を示すのは困難そうである。しかし、新しい予想によれば同じ Haupt type 同志で合同を示せばよいので、この点では話が単純になるのである。

Conjecture 5.1 (半整数ウェイトの Harder 予想). 整数 $k \geq 3$ と偶数 $j \geq 0$ を固定する。ヘッケ同時固有函数 $f \in S_{2k+2j-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ に対して、対応する $h \in S^+_{k+j-1/2}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ をとる。このときあるヘッケ同時固有関数 $F \in S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ が存在して、$L_{alg}(2k+j-3, f)$ を割る大きな素イデアル $\mathfrak{l}$ に対して、$L(s,F)$ と $L(s,E(h))$ の p オイラー因子は、すべての素数 p について、*modulo* $\mathfrak{l}$ で合同である。

ここで p オイラー因子が合同というのは、p^{-s} の多項式として、係数が合同だという意味である。

6. ベクトル値のヤコービ形式の構造と次元

さて、以上の半整数版 Harder 予想の実例を作りたい。しかし、半整数ウェイトでの plus space の条件は、フーリエ係数の条件なので、これを見るのはそう簡単ではない。なぜなら $S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ の中で $S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ の占める次元はかなり小さいからである。前の論文 [9] では実際に $S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)$ の空間の基底を本当に書いて、その中のフーリエ係数の条件で絞って plus space の元を求めるという計算を実際に実行した。たとえば 96 次元のなかで 2 次元分求めると言った計算である。しかし、この計算は効率が悪い。一方で plus space は index 1 のある種のヤコービ形式との同型が知られている。従って直接、ヤコービ形式を与えることができれば、話はより簡単になる。そこで、ベクトル値ヤコービ形式の構造定理を目指すことにした。

その説明に入る前に、指数 1 のヤコービ形式と plus space の同型対応について復習しておく。ここで登場するベクトル値のヤコービ形式は正則なものと歪正則なものの 2 種類である. それぞれの定義は次の通りである。まず指数 1 ウェイト $\det^k Sym_j$ の正則ヤコービ形式は、$F(\tau,z) : H_2 \times \mathbb{C}^2 \to V_j$ なる正則関数で、任意の $\gamma \in \Gamma_2$ と $\mu, \nu \in \mathbb{Z}^2$ に対して、次の保型性 (1), (2) を満たすものである。

$$\begin{aligned}
&(1) \quad F(\gamma\tau, z(C\tau+D)^{-1}) \\
&\qquad = \det(C\tau+D)^k e(z(C\tau+D)^{-1}C\,{}^tz) Sym_j(C\tau+D)F(\tau,z), \\
&(2) \quad F(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e(-\lambda\tau\,{}^t\lambda - 2\lambda\,{}^tz)F(\tau,z).
\end{aligned}$$

ここですべてのベクトルは行ベクトルとしている。また $e(x) = exp(2\pi i x)$ とした。これらの保型性により、$F(\tau,z)$ は次の形のフーリエ展開を持つ。

$$F(\tau,z) = \sum_{N \in L_2^*, r \in \mathbb{Z}^2} c(N,r)e(Tr(N\tau + r\,{}^tz)).$$

以上で実は Koecher principle により、$c(N,r)$ は $4N - {}^trr$ が半正定値以外の時はゼロになる ([14])。特に、$4N - {}^trr > 0$（つまり正定値）以外の時は $c(N,r) = 0$ となるようなヤコービ形式をヤコービカスプ形式という。この関数の空間を $J^{cusp}_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$ と書くことにする。添え字の 1 は指数 1 という意味であり、上で exp の部分を exp^m に変えると指数 m の場合の定義になる。

次に歪正則な指数1のヤコービ形式の定義を述べる。この定義は1次の時は、Skoruppa によるが、一般の次数の時は Arakawa による。

$H_2 \times \mathbb{C}^2$ 上の V_j 値の関数 $F(\tau, z)$ が z について正則であり、τ（の実部と虚部の各成分）については実解析的であるとする。次の3つの条件を満たす時に、F を指数1の歪正則ヤコービ形式という。

任意の $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2$ と $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^2$ に対して、

$$(3) \qquad F(\gamma\tau, z(C\tau+D)^{-1}) \\ = \overline{\det(C\tau+D)}^k \left(\frac{\det(C\tau+D)}{|\det(C\tau+D)|} \right) \overline{Sym_j(C\tau+D)} F(\tau, z),$$

$$(4) \qquad F(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e(-\lambda\tau\,{}^t\lambda - 2\lambda\,{}^t z) F(\tau, z).$$

(5) F は次の形のフーリエ展開を持つ。

$$F(\tau, z) = \sum_{N \in L_2^*, r \in \mathbb{Z}^2} c(N, r) e(Tr(N\tau - \frac{1}{2} i (4N - {}^t rr) Y)) e(r\,{}^t z),$$

かつ ${}^t rr - 4N$ が半正定値でなければ、$c(N, r) = 0$ である。

ここで記号 Y は τ の虚部を表す。特に ${}^t rr - 4N > 0$ でなければ $c(N, r) = 0$ となるとき、F を歪正則ヤコービカスプ形式という。このような関数の空間を $J^{skew,cusp}_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$ と書く。

Theorem 6.1 ([5],[6],[2],[13]). 次の L 関数を保つ同型対応がある。

$$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4), \psi^k) \cong J^{cusp}_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$$
$$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4), \psi^{k-1}) \cong J^{skew,cusp}_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$$

さて、Jacobi 形式には、正則でも歪正則でも2種類の展開がある。$z=0$ に関する Taylor 展開と θ 関数を用いた展開（テータ展開と呼ぼう）とである。$\mu \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ に対して、$H_2 \times \mathbb{C}^2$ 上の第2種テータ関数 $\vartheta_\mu(\tau, z)$ を次で定義する。

$$\vartheta_\mu(\tau, z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} e\left((p + \frac{\mu}{2}) \tau\,{}^t(p + \frac{\mu}{2}) + 2(p + \frac{\mu}{2})\,{}^t z \right).$$

このときヤコービ形式 F は保型性の2番目の条件より

$$F(\tau, z) = \sum_{\mu \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2} \phi_\mu(\tau) \vartheta_\mu(\tau, z)$$

となる τ の関数 $\phi_\mu(\tau)$ が一意的に定まることはよく知られている。特に F が正則ならば $\phi_\mu(\tau)$ も正則である。一方で、$F(\tau, z)$ は z について正則であるから、$z=0$ での Taylor 展開があるが、$-1_4 \in \Gamma_2$ の作用を考えると、テータ展開において $\vartheta_\mu(\tau, -z) = \vartheta_\mu(\tau, z)$ であることより、$F(\tau, -z) = F(\tau, z)$ となるので、

$$F(\tau, z) = f_0(\tau) + f_{20}(\tau) z_1^2 + f_{11}(\tau) z_1 z_2 + f_{02}(\tau) z_2^2 + O(z^4)$$

とも書ける。(特に j が奇数ならばヤコービ形式は零しかない。) ここで F が正則ヤコービ形式ならば展開係数 $f_*(\tau)$ も正則である。

F が正則な場合はこの2つの展開を結びつけて考えるとヤコービ形式の空間の構造がかなりよくわかる。一般の高次のヤコービ形式では、どの程度の Taylor 展開係数がわかれば F が決まるかはあまりはっきりとはわかっていない。しかし今の場合 (次数2指数1の場合) は $f_0 = f_{20} = f_{11} = f_{02} = 0$ ならば $F = 0$ であることがわかる。(これはかなり偶然的な事情であって、次数3以上では正しくない。) 証明は、テータ展開の両辺を z_i で2回まで微分して $z = 0$ と置くことにより、$\phi_\mu(\tau)$ を未知数、$\vartheta_\mu(\tau, 0)$ およびその τ の各成分での微分を係数行列、右辺を $(f_0, f_{20}, f_{11}, f_{02})$ とする4連立1次方程式ができ、この行列式が Γ_2 のウェイト5の指標付ジーゲル保型形式 χ_5 であって恒等的にゼロではないことからわかる。そこでヤコービ形式の構造を調べるには、次のが問題になる。「ヤコービ形式の Taylor 展開係数には正確にどのような関数が現れるのか?」紙数も尽きつつあるので、あまり詳しくは述べられないが、大体つぎのように考える。まず $F(\tau, 0) = f_0(\tau)$ を考えると、F の保型性より $f_0 \in A_{k,j}(\Gamma_2)$ であることはすぐわかる。これにひきかえ (f_{20}, f_{11}, f_{02}) の保型形式との関連はただちにはよくわからない。しかし $f_0 = 0$ だと仮定してみると、$f_{20}(\tau)z_1^2 + f_{11}(\tau)z_1z_2 + f_{02}(\tau)z_2^2$ が実はウェイトが $\det^k Sym_2 \otimes Sym_j$ のジーゲル保型形式であることは F の保型性からただちにわかる。ここでもちろん $Sym_2 \otimes Sym_j$ は既約ではなく $j \geq 2$ ならば、

$$Sym_2 \otimes Sym_j \cong Sym_{j+2} \oplus \det Sym_j \oplus \det{}^2 Sym_{j-2}$$

である。$j = 0$ ならばもちろん Sym_2 のままである。z_i の2次式と、もともとの V_j の元の積なので、このようなウェイトになるのである。これから、たとえ $f_0 \neq 0$ でも、2次の項は $A_{k,j+2}(\Gamma_2) \oplus A_{k+1,j}(\Gamma_2) \oplus A_{k+2,j-2}(\Gamma_2)$ の元に近いことがわかる。実際には、f_0 から決まる補正項をうまく定義して2次の項に加えることにより、保型性を言うことができる。この補正項 $H(f_0)$ は、f_0 の微分などを用いて z_i の2次式をつくることにより具体的に書き下せるのだが、形は少々込み入っているので、ここでは省略する。しかしとにかく $H(f_0)$ をうまく定義して

$$G(f_0, f_{20}, f_{11}, f_{02}) = H(f_0) + f_{00}(\tau)z_1^2 + f_{11}(\tau)z_1z_2 + f_{02}(\tau)z_2^2$$

とおくと $j \geq 2$ ならば、

$$G(f_0, f_{20}, f_{11}, f_{02}) \in A_{k,j+2}(\Gamma_2) \oplus A_{k+1,j}(\Gamma_2) \oplus A_{k+2,j-2}(\Gamma_2)$$

となり、$j = 0$ ならば直和の代わりに単に $A_{k,2}(\Gamma_2)$ となる。さらに $\mathcal{T}(f_0, f_{20}, f_{11}, f_{02}) = (f_0, G(f_0, f_{20}, f_{11}, f_{02}))$ とおけばこれは $J_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$ から種々のウェイトのベクトル値ジーゲル保型形式の直和への単射写像である。次に問題となるのはこの写像の像である。これは前に述べた4元連立1次方程式の解 $(\phi_\mu(\tau))$, $(\mu \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$ がいつ正則になるかということと同値である。この連立1次方程式の行列式が χ_5 であるという特殊性から、像になるための条件を Witt operator W で正確に

述べることができる。ここで W は任意の $Z=\begin{pmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{pmatrix}\in H_2$ の関数 F に対して、$WF=F\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$ として定義される。

Theorem 6.2. *(1)* 前述の $\mathcal{T}: J_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)\to(f_0,G(f_0,f_{20},f_{11},f_{02}))\in A_{k,j}(\Gamma_2)\oplus A_{k,j+2}(\Gamma_2)\oplus\delta_j A_{k+1,j}(\Gamma_2)\oplus\delta_j A_{k+2,j-2}(\Gamma_2)$ なる写像は単射である。ただし δ_j は $j=0$ で 0, $j\geq 2$ で 1 とおく。
(2) $f_0\in A_{k,j}(\Gamma_2)$ とし、$f_{ij}(\tau)$ $(i+j=2)$ を $G(f_0,f_{20},f_{11},f_{02})\in A_{k,j+2}(\Gamma_2)\oplus\delta_j A_{k+1,j}(\Gamma_2)\oplus\delta_j A_{k+2,j-2}(\Gamma_2)$ となるような H_2 の正則関数とする。このとき、f_0, f_{ij} が $F\in J_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$ の *0* 次と *2* 次の *Taylor* 展開係数になるための必要十分条件は $W(f_{11})=0$ である。

$j=0$ のときは、$J_{(k,0),1}(\Gamma_2^J)$ が具体的に記述できることは、すでに [10] に公表済みであるが、$j>0$ のときも、像 $Im(\mathcal{T})$ はベクトル値ジーゲル保型形式の W による像がわかっていれば、正確に求めることができる。実際に、[12] によれば、$W(A_{k,j}(\Gamma_2))$ は $k\geq 10$ では、いろいろなウェイトの楕円保型形式の空間の直積の和として正確に記述されている。これにより次を示すことができる。

Theorem 6.3. $k\geq 8$ とすると、$J_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$ はベクトル値保型形式を用いて正確に記述される。また $\dim J_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$, $J^{cusp}_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$ の具体的な公式も書け、特にこれは対馬の予想と一致している。

この次元の k と j を動かしたときの母関数 $\sum_{k,j}\dim J_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)t^k s^j$ などは、2 変数 t,s の有理関数として具体的に書き下せるのだが、少々長くなるので紙数の関係でここでは省略せざるを得ない。

ちなみに、今のところ skew holomorphic Jacobi forms の構造定理は、どのようにして調べればよいのか、よくわかっていない。正則な時をまねて、$z=0$ で Taylor 展開したときの係数に現れる関数を見ようとすると、これがあまり研究されたことのない関数になってしまうからである。これはものすごく具体的な実解析的関数であって、独自の研究に値する面白い対象ではないかとも思うのだが、私にはよくわからない。織田スクールの人たちに教えを乞いたいところである。

7. Harder 予想の実例

実は j が小さい時にはベクトル値ジーゲル保型形式の空間は [11] などで、非常に具体的にわかっている。従って前節の結果を用いれば具体的にヤコービ形式の基底を求めるのは、それほど難しくはない。ここでは $A^+_{23/2,2}(\Gamma_0(4))\cong J_{(12,2),1}(\Gamma_2^J)$ の場合を考える。前に述べた次元公式によれば $\dim A^+_{23/2,2}(\Gamma_0(4))=3$, $\dim S^+_{23/2,2}(\Gamma_0(4))=2$ である。空間 $A^+_{23/2,2}(\Gamma_0(4))$ のヘッケ同時固有関数は次の 3 つ F_0, F_1, F_2 から、空間 $S^+_{23/2,2}(\Gamma_0(4))$ は F_1, F_2 の 2 つからなることが示せる。
(1) Klingen 型アイゼンシュタイン級数 $F_0=E(h_{27/2})$. ここで $h_{27/2}$ はウェイト 27/2 の 1 変数保型形式の Kohnen plus space $S^+_{27/2}(\Gamma_0^{(1)}(4))$

の基底である。志村対応により $h_{27/2}$ に対応する $S_{26}(SL_2(\mathbb{Z}))$ の元を g_{26} と書くと、前に述べたように

$$L(s, F_0) = \zeta(s-3)\zeta(s-22)L(s, g_{26})$$

である。
(2) g_{26} を前の通り、$0 \neq g_{20} \in S_{20}(SL_2(\mathbb{Z}))$ とすると、F_1 はペア (g_{20}, g_{26})（より正確には対応する半整数ウェイト）からのリフトであり、

$$L(s, F_1) = L(s-3, g_{20})L(s, g_{26}).$$

となる。
(3) F_2 は上のようなリフトからは得られないカスプ形式である。
$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ 上のヘッケ作用素 $T(1, p, p^2, p)$ の固有関数 F の固有値を $\lambda(p, F)$ と書く。これは $p = 2$ の時も（レベル 4 を割る素数だが）$J_{(k,j),1}(\Gamma_2^J)$ で定義された自然なヘッケ作用素を同型で移して考えれば p 奇数と同様に定義されている。$g_{26} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{26}(n)q^n$ $(a(1) = 1)$ とする。

Theorem 7.1. 任意の素数 p に対して

$$\lambda(p, F_2) \equiv p^3 + p^{22} + a_{26}(p) = \lambda(p, F_0) \bmod 43$$

である。

この定理の良い点は、すべての p で成立することが証明できることである。前に述べた志村対応予想を仮定すると、

$$S^{+,0}_{23/2,2}(\Gamma_0(4)) \cong S_{5,18}(\Gamma_2)$$

である。この後者（もちろん 1 次元）については、多くの素数についての固有値が計算されており、それらについては modulo 43 での合同が Harder, van der Geer 等により示されていた。しかし、これは有限個の p に対する実験であって、すべての p で成立する結果はこのような方法では望むべくもない。これに対し、上の定理は、同じウェイトと群の空間の中で、係数が整とわかっているような具体的な保型形式との関係を見ることによって、すべての p についての合同が主張できる点が新しい。

ちなみに、このような合同は (multiplicator が平方であるような）すべてのヘッケ作用素 $\mathbb{T}$ について成立することは言うまでもない。即ち

$$\lambda(\mathbb{T}, F_2) \equiv \lambda(\mathbb{T}, F_0) \bmod 43$$

がいつでも成立する。なお、F_0 と F_1 の固有値の間には、1 変数の良く知られたカスプ形式 g_{20} とアイゼンシュタイン級数 E_{20} の間の合同からくる mod 283, mod 617 などの合同があるが、これはもちろん何ら新しい現象ではない。

最後に、この定理を一般的に証明する戦略について少し述べておく。桂田英典氏は、整数ウェイトのジーゲル保型形式間の合同について、Eisenstein 級数の pullback formula を用いた方法を用いて、証明を行っている。同様のことを半整数ウェイトで行えば、類似の証明ができるはずである。もちろん半整数ウェイトの pullback formula の公式は書かれていないし、微分作用素の整数条件への影響など細部を見る時間の

かかる研究になると思う。このような方法で Harder 予想の半整数ウェイト版が証明されると仮定すれば、もともとの整数ウェイト版は志村対応予想を跡公式で証明できれば証明できたことになる。これは、もちろんもっと難しい。そして、もう一つ注意を喚起しておかねばならないのは、我々の対応予想 4.5 では j が偶数と仮定しているので $A_{k,j}(\Gamma_2)$ のうちで k が奇数のものしか取り扱えていないという点である。k を偶数のものまで考えるには、"半整数ウェイト"の実解析的保型形式を考える必要があると思われ、この場合については Harder 予想の証明には更に新しいアイデアが必要であると思われる。

References

[1] G. Harder, A congruence between a Siegel and an elliptic modular form, in The 1-2-3 of Modular Forms, Springer Universitext, (2008), 247–262.

[2] S. Hayashida, Skew-holomorphic Jacobi forms of index 1 and Siegel modular forms of half-integral weight. J. Number Theory 106 (2004), no. 2, 200–218.

[3] S. Hayashida, Fourier-Jacobi expansion and the Ikeda lift, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg Vol. 81 (2011),1–17.

[4] S. Hayashida, On the lifting of pairs of elliptic modular forms to Siegel modular forms of half-integral weight of degree two, preprint 2012.

[5] T. Ibukiyama, On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights. Comment. Math. Univ. St. Paul. 41(1992), no.2, 109-124.

[6] S. Hayashida and T. Ibukiyama, Siegel modular forms of half integral weight and a lifting conjecture, J. Math. Kyoto Univ. Vol. 45 No. 3 (2006), 489-530.

[7] T. Ibukiyama, Siegel Modular Forms of Weight Three and Conjectural Correspondence of Shimura Type and Langlands Type, The conference on L-functions, World Scientific, (2007), 55-69,

[8] T. Ibukiyama, Dimension formulas of Siegel modular forms of weight 3 and supersingular abelian varieties, Proceedings of the 4-th Spring Conference on modular forms and related topics, "Siegel Modular Forms and Abelian Varieties" (2007), 39-60.

[9] T. Ibukiyama, A Conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences, in *Modular Forms on Schiermonnikoog*, Cambridge University Press (2008), 107-144.

[10] T. Ibukiyama, The Taylor expansion of Jacobi forms and applications to higher indices of degree two, Kyoto J. Math. Vol. 48 No. 3 (2012), 579-613.

[11] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of symmetric tensor weight of small degree, Commentarii Math. Univ. St. Pauli Vl. 61 No. 1(2012), 51-75.

[12] T. Ibukiyama and S. Wakatsuki, Siegel modular forms of small weight and the Witt operator, Comtemporary Math. 493 "Quadratic Forms — Algebra, Arithmetic, and Geometry. Algebraic and Arithmetic Theory of Quadratic Forms" AMS (2009), 189-209.

[13] S. Kimura, On vector valued Siegel modular forms of half integral weight and Jacobi forms, Master Thesis, Osaka Univ. (2005), pp. 82.

[14] C. Ziegler, Jacobi forms of higher degree, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 59(1989), 191–224.

PROFESSOR EMERITUS, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA, 560-0043 JAPAN

E-mail address: ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp